

Metoda Karnaugh.

Powszechnie uważa się, iż układ o mniejszej liczbie elementów jest tańszy i bardziej niezawodny, a spośród dwóch układów o takiej samej liczbie elementów logicznych lepszy jest ten, który operuje mniejszą liczbą sygnałów (mniejsza ilość wejść). Tak więc niezależnie od zastosowanych dalej elementów schematu logicznego, bardzo ważnym etapem syntezy jest poszukiwanie takiej postaci funkcji, w której występuje minimalna liczba zmiennych lub ich negacji. Proces poszukiwania tej postaci minimalnej nosi nazwę minimalizacji funkcji i opiera się na następujących regułach sklejania:

$$Ax + A\bar{x} = A$$

$$(B + x)(B + \bar{x}) = B$$

w których A i B to zmienne lub funkcje przełączające. Reguły te można przedstawić następująco: suma lub iloczyn dwóch wyrażeń różniących się między sobą tylko na jednej pozycji – znakiem negacji, mogą być zastąpione jednym wyrażeniem, bez litery stanowiącej różnicę, np.:

$$x_1x_2 + x_1\bar{x}_2 = x_1(x_2 + \bar{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1 \quad \text{lub} \quad (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3) = \bar{x}_2 + x_3$$

Wyrażenia podlegające sklejaniu nazywane są wyrażeniami sąsiednimi.

W wyniku sklejania uzyskuje się wyrażenia, które już nie są postaciami kanonicznymi, ale zachowują postać sumy iloczynów oraz iloczynu sum. Wyrażenia tego typu przyjęto nazywać postacią normalną sumy i postacią normalną iloczynu.

W przypadku gdy funkcja jest złożona, wielu zmiennych wyszukiwanie wyrażeń sąsiednich i sklejanie w sposób analityczny jest bardzo uciążliwe. Istnieją metody upraszczające procedurę minimalizacji. Jedną z nich jest metoda tablic Karnaugh (zwana również metodą Veitcha).

Metoda ta ułatwia sklejanie przez takie usytuowanie na płaszczyźnie wyrażeń postaci kanonicznej, aby wyrażenia sąsiednie były umieszczone blisko siebie, a więc były sąsiednimi również w sensie geometrycznym. Tablica do której wprowadzamy wartości logiczne funkcji jest prostokątna i zawiera 2^n pól. Każda kratka tablicy odpowiada jednej kombinacji wartości zmiennych wejściowych. Kod tych kombinacji jest dobrany tak, aby sąsiednie kratki różniły się wartością jedynie jednej zmiennej, a więc by odpowiadały im sąsiednie wyrażenia. Kod o takich właśnie własnościach nosi nazwę kody Gray'a. Do opisanej tym kodem tablicy wpisuje się symbole, odpowiadające wartościom funkcji dla odpowiednich kombinacji zmiennych wejściowych. Przykłady tablic Karnaugh dla dwóch, trzech, czterech oraz pięciu zmiennych przedstawia poniższy rysunek. Baczna uwagę należy zwrócić na specyficzną numerację poszczególnych kratek, i stosować ją podczas wpisywania wartości funkcji logicznej zdefiniowanej w systemie dziesiętnym. Wymusza ją zastosowanie kodu Gray'a.

	B		
A		0	1
0		0	1
1		2	3

	BC				
A		00	01	11	10
0		0	1	3	2
1		4	5	7	6

	CD				
AB		00	01	11	10
00		0	1	3	2
01		4	5	7	6
11		12	13	15	14
10		8	9	11	10

	CD								
AB		000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	1	3	2	6	7	5	4
01		8	9	11	10	14	15	13	12
11		24	24	27	26	30	31	29	28
10		16	17	19	18	22	23	21	20

Po wpisaniu wartości funkcji do tablicy przystępujemy do analizy. Jeśli w dwóch sąsiednich kratkach wypełnionej tablicy Karnaugh znajdują się jednakowe symbole (logiczne 0 lub logiczne 1), to odpowiadające tym kratkom wyrażenia można skleić, co odpowiada usunięciu litery, która w ramach sklejanej grupy zmienia wartość. Takie sąsiednie kratki tablicy, tworzące pary, łączy się linią oznaczającą możliwość sklejania. Przykładowe pary dla tablic trzech i czterech zmiennych zamieszczam poniżej oraz w późniejszych przykładach.

	BC				
A		00	01	11	10
0					
1					

	CD				
AB		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

Gdy łączonymi elementami są jedynki to funkcja nasza ma postać sumy iloczynów, więc rezultat upraszczania będzie iloczynem w którym symbolowi 1 odpowiada zmienna A, a symbolowi 0 jej negacja czyli \bar{A} . Jeżeli natomiast łączonymi elementami są zera to funkcja przyjmie postać iloczynu sum, a rezultat minimalizacji będzie sumą, w której symbolowi 1 będzie odpowiadała negacja zmiennej \bar{B} , symbolowi 0 sama zmienna.

Podczas minimalizacji tą metodą należy przestrzegać kilku ważnych zasad:

1. Gdy nie zależy nam konkretnej postaci funkcji minimalizowanej (koniunkcyjnej lub dysjunkcyjnej) powinniśmy zdecydować się na łączenie tych elementów które dadzą nam prostsze rozwiązanie (liczebna przewaga jednych elementów nad drugimi).
2. Wśród wybranych symboli (0 albo 1) poszukuje się możliwości utworzenia największej grupy (lub kilku grup) np. 8-kratowej, a gdy takiej nie znajdziemy to 4-kratowej itd. Wybrane symbole leżące poza wydzielonymi grupami łączy się w mniejsze grupy z możliwością wykorzystania kratek już wcześniej użytych w innej grupie (jeśli pomoże to w uzyskaniu grupy o większej liczbie elementów). Symbole

nie dające się pogrupować zaznaczamy jako grupy jednolelementowe (jednokratkowe”).

3. Jeżeli istnieją w tablicy grupy, których składowe należą już do innych grup taką grupę usuwamy w celu uzyskania najprostszej postaci funkcji (pozostawiamy jedynie grupy niezbędne).
4. Gdy istnieje większa liczba możliwości połączeń w grupy to wybieramy tą, która będzie najprostsza (będzie uzależniona od minimalnej liczby zmiennych wejściowych).
5. Liczba pól wchodzących w skład grupy musi być potęgą liczby dwa (2^n gdzie n to liczba naturalna). W przeciwnym razie nie można opisać danej grupy za pomocą jednego iloczynu (bądź sumy - gdy zakreślamy zera).
6. Każde dwa łączone pola muszą być swoimi geometrycznymi sąsiadami (muszą być rozdzielone od siebie linią podziału krutek lub krawędzią tablicy). Inaczej wygląda to w przypadku tablic większej ilości zmiennych gdzie można łączyć nie tylko takie pola. Wtedy obowiązuje zasada że dwa łączone elementy muszą się różnić co najwyżej jednym bitem w kodzie Gray'a.
7. Łączone pola muszą być prostokątami (lub w szczególności kwadratami – muszą posiadać co najmniej jedną oś symetrii).
8. W przypadku gdy funkcja jest nie w pełni określona (dla pewnych wartości przyjmuje wartości dowolne) postępujemy podobnie pamiętając, iż znaki nieokreśloności możemy łączyć z zerami lub jedynkami.

Metoda tablic Karnaugh jest przydatna dla funkcji logicznych nie więcej niż 5-6 zmiennych. W przypadku większej liczby zmiennych algorytm wyszukiwania elementów nadających się do sklejania mocno się komplikuje (ciężko jest geometrycznie odnaleźć i zaznaczyć te, które łączą się jednym bitem). Wtedy korzysta się z metod matematycznych.

Przykłady:

Weźmy w pełni określoną funkcję postaci dziesiętnej:

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11\}$$

Przeprowadzimy minimalizację w celu uzyskania iloczynu sum oraz sumy iloczynu.

Wpierw wpisujemy wartości funkcji do tabeli Karnaugh mając na uwadze odpowiednią kolejność, a następnie grupujemy zera (tablica prawa oraz jedynki (tablica lewa):

	CD	00	01	11	10
AB	00	1	1	1	0
01	00	1	1	0	1
11	00	0	0	0	0
10	00	0	1	1	1

	CD	00	01	11	10
AB	00	1	1	1	0
01	00	1	1	0	1
11	00	0	0	0	0
10	00	0	1	1	1

Na ich podstawie otrzymujemy normalne postaci minimalne funkcji:

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3$$

dla jedynek oraz:

$$y = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_3 + x_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)$$

dla zer.

Teraz rozważmy przykład w którym funkcja nie jest w pełni określona. Weźmy funkcję określoną już w tabelicy Karnaugh poniżej:

		BC			
A		00	01	11	10
	0	1	-	1	0
	1	-	0	0	0

Jeżeli nie uwzględnilibyśmy pozycji nieokreślonych funkcja nasza przyjąłaby postać:

		BC			
A		00	01	11	10
	0	1	-	1	0
	1	-	0	0	0

		BC			
A		00	01	11	10
	0	1	-	1	0
	1	-	0	0	0

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$$

Natomiast jeśli uwzględnimy znaki nieokreśloności podczas budowania grup to funkcja nasza przyjmie postać:

$$y = \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_3)$$

Jak widać po zapisie samej funkcji (jak i tabelach zamieszczonych poniżej) funkcja zapisana w ten sposób jest funkcją prostszą (zależy od mniejszej liczby zmiennych wejściowych).

Dlatego wykorzystanie nieokreśloności funkcji podczas doboru grup jest wskazane wszędzie tam gdzie jest to możliwe.

A \ BC	00	01	11	10
0	1	-	1	0
1	-	0	0	0

A \ BC	00	01	11	10
0	1	-	1	0
1	-	0	0	0